

## DOS CASOS REFERIDOS AL REPARTO CON FRACCIONES

Eliza Minnelli Olguín Trejo, Marta Valdemoros Álvarez

CINVESTAV- IPN

(México)

[minnelli\\_angel@yahoo.com.mx](mailto:minnelli_angel@yahoo.com.mx), [mvaldemo@cinvestav.mx](mailto:mvaldemo@cinvestav.mx)

**Resumen.** Análisis del contraste entre dos sujetos del estudio de casos, Miriam y Mario (Olguín, 2009), quienes al trabajar el reparto con fracciones utilizan con frecuencia la estrategia “Divide cada unidad en el mismo número de personas”; sin embargo, al dar la respuesta numérica él utiliza números naturales y ella da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto. Pero en la entrevista emplearon otras estrategias consistentes en otorgar a la unidad diversos sentidos y con base en ello realizar el reparto, manteniendo distintas interpretaciones personales de la unidad.

**Palabras clave:** fracciones, reparto, cociente, estrategias de resolución

**Abstract.** Analysis of the contrast between two subjects of case studies Mario and Miriam (Olguín, 2009), who when working the deal with fractions often used the strategy “Divide each unit in the same number of people”, however, to give the answer number he uses natural numbers and she gives an equivalent fraction that corresponds to the distribution. But in the interview used other strategies of giving different meanings to the unit and based on that make the deal, maintaining different personal interpretations of the unit.

**Key words:** fractions, share, ratio, solving strategies

### Introducción

El presente trabajo comunica el análisis efectuado en torno a dos de los casos que sometimos a estudio. El problema de la investigación es identificar estrategias en la resolución de problemas de reparto con fracciones. Todo esto se realizó con el fin de reconocer los procesos empleados por los niños, para comprender cómo se inicia la construcción del número fraccionario. Así, dimos énfasis a la identificación de las diferentes estrategias que utilizan en la resolución de problemas de reparto con fracciones, las estrategias más frecuentes y las dificultades que pudieran presentar en la resolución de dichos problemas, los cuales constituyen los objetivos del estudio.

El primer caso es el de Miriam, una alumna que se destacó por mostrar una buena comprensión de la equivalencia en sus estrategias de reparto, pues pese al procedimiento que utilizó en la resolución del problema ella prefirió dar un número equivalente al resultado de su reparto; la estrategia que utilizó consistió en dividir cada unidad en el mismo número de personas, pero en su respuesta numérica se ajustó a la categoría de estrategia expresada como “Da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto”.

El otro caso es el de Mario, quien destacó por tener una fuerte tendencia a dar la respuesta numérica de sus repartos con números naturales, la estrategia que utilizó con más frecuencia es “Divide cada unidad en el mismo número de personas”.

## Marco teórico

Afirma Kieren (1984) que la partición y la equivalencia son dos mecanismos constructivos que permiten al niño construir los cinco significados asignables a la fracción, a los cuales identifica como subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo. Éste último va relacionado con los otros cuatro significados de la fracción y es definido como un todo que ha sido cortado, prevaleciendo en esta situación la equidad e igualdad; se utiliza la idea de fracción como un medio para cuantificar la relación entre el todo y un número designado de partes, significado que asociado al de la fracción como cociente permite la cuantificación de los resultados en situaciones de reparto, al dividir cada unidad dentro de un número dado de partes (Kieren, 1980).

De acuerdo con Lamon (1996), el reparto con fracciones debería de ser aprovechado como una herramienta didáctica para ayudar a los niños a desarrollar ideas elementales de número racional.

Por su parte, Valdemoros (1993) ha enfatizado que el estudiante, para poder incorporar las fracciones, necesita mucho más que simplemente desarrollar designaciones y significados nuevos, sino que requiere de la creación de distintos instrumentos, como la incorporación de nuevas reglas sintácticas y la consideración de varias redefiniciones que incluyen, entre otras cosas, la identificación específica de la unidad que corresponde a ese conjunto numérico, el reconocimiento de expresiones equivalentes, modalidades particulares de operación aritmética, por mencionar sólo algunas. Valdemoros (2001) propone que en la enseñanza escolar deben ser tomados en cuenta y esclarecidos los enlaces entre las relaciones referenciales y el significado de la unidad, lo que le permitirá al niño experimentar y desenvolverse en el ámbito del uso de las fracciones; dichos enlaces son introducidos a partir de actividades de partición, reparto, equivalencia y la utilización de material manipulativo (Perera, 2001).

En cuanto a estrategias utilizadas al resolver problemas de reparto con fracciones, Lamon (1996) apoyándose en Behr analiza las estrategias de partición de los niños en términos de las marcas y cortes, quien ha identificado la “Estrategia de marcar todo”. En ella, todas las piezas se señalan, inclusive aquéllas que permanecen intactas, pero sólo la(s) pieza(s) que requieren cortarse se partirán. Ejemplo: Cuando reparten 4 galletas a 3 niños marcan todas las galletas en tercios y al distribuirlas sólo una galleta la cortan, dando a cada niño una galleta y un tercio. En la “Estrategia de distribución” todas las piezas del entero se marcan y cortan, y las piezas más

pequeñas se distribuyen. Ejemplo: Para repartir 4 galletas entre 3 niños dividen cada una en tercios, las cortan y dan a cada niño  $\frac{4}{3}$ .

En cambio, Charles & Nason (2000) identificaron la “Estrategia fundante del cociente partitivo”, en la cual el sujeto reconoce el número de personas (Y), genera el nombre de la fracción de acuerdo al número de personas, reconoce la relación entre el nombre de la fracción y el número de pedazos del entero, parte cada objeto en pedazos iguales, efectúa el reparto y cuantifica cada parte. Ejemplo: Al repartir 1 pizza entre 4 personas, de acuerdo al número de personas, los estudiantes deciden dividir en cuartos, los reparten y entregan un cuarto a cada uno.

Empson, Junk, Domínguez & Turner (2005) identifican la “estrategia de coordinación de un solo artículo” que implicó repartir cada artículo en un número de piezas (n) igual al número de gente (p) que comparten los artículos. Lo llamaron así porque los niños coordinaron el número de personas con el número de partes en cada artículo individual. Ejemplo: Para repartir 4 caramelos entre 6 personas dividieron cada caramelo en sextos y dieron  $\frac{4}{6}$  a cada persona.

La investigación efectuada por Mamede, Nunes & Bryant (2005) aseveran que en las fracciones en situaciones de cociente, el denominador señala el número de personas del reparto y el numerador el número de partes que les corresponde a cada persona. Entonces,  $\frac{2}{4}$  puede representar 2 chocolates divididos entre 4 personas (lo que corresponde a un reparto). Y mencionan que puede haber dos significados: la división (2 chocolates para 4 personas) y la cantidad que recibe cada persona (cada uno recibió  $\frac{2}{4}$  del chocolate).

Para el seguimiento de las estrategias, Valdemoros (1993, 2004) pone en práctica el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal), en situaciones fraccionarias ligadas al reparto. Este modelo de análisis presenta una naturaleza eminentemente lingüística, permitiendo identificar los siguientes planos constituyentes de todo lenguaje: el plano semántico, el plano sintáctico, el plano de la “traducción” de un lenguaje a otro lenguaje o a un sistema simbólico, el plano de la escritura numérica y el plano de la lectura. Además, confirma la pertinencia de utilizar el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal) a través del desempeño de los niños en situaciones ligadas al reparto con fracciones, permitiendo reconocer algunos de los múltiples conflictos cognitivos comúnmente enfrentados por los estudiantes.

## Método

La escuela donde se realizó el estudio pertenece al sistema público y está localizada en una zona del área urbana de la Ciudad de México. Los alumnos cursaban el cuarto grado de primaria y tenían 9 años.

Los instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación fueron: observación en el aula, un cuestionario y entrevistas individuales.

Se destinaron sesiones a obtener información sobre lo que se prioriza y lo que se deja a un lado en la enseñanza del reparto con fracciones, permitiendo la reconstrucción de características primordiales de la enseñanza recibida por el grupo escolar. Para fines de la investigación era importante observar en qué grado influía la enseñanza recibida en las estrategias que los niños utilizan para dar solución a los problemas de reparto con fracciones.

El cuestionario fue el instrumento que permitió hacer una exploración de las ideas, nociones y conocimiento previos con los que contaban cada uno de los alumnos respecto al significado de fracción como relación parte-todo y como cociente; además de observar diversas estrategias que utilizaron cuando se enfrentaron a problemas de reparto con fracciones, permitiendo la identificación de las más empleadas. También, constituyó el punto de partida para la selección de los sujetos del estudio de casos. Consta de problemas de reparto que admiten una interpretación continua y discreta de los mismos en modelos circulares, rectangulares y cuadrados; incluimos en el cuestionario tareas para producir medios, cuartos, tercios, sextos y una tarea de equivalencia para comparar medios y cuartos en un modelo circular.

Las entrevistas fueron individuales, semiestructuradas y videograbadas, aplicadas a Miriam y Mario, por exhibir procesos relevantes de aprendizaje en la resolución del cuestionario. Los cuatro problemas utilizados fueron diseñados con base en las tareas utilizadas por Streefland (1991); nos apropiamos de su idea de la familia Quebrado porque con su utilización se elimina la calidad abstracta de participantes sin nombre y con ello el estudiante no sólo es capaz de dividir más fácilmente los objetos a repartir, sino que puede vincular las porciones producidas con los nombres de los participantes, además de ofrecer un ambiente familiar. Se usaron modelos circulares, rectangulares y cuadrados, contemplando tareas para producir medios, tercios, cuartos y sextos, además de tareas de equivalencia para comparar medios y cuartos en modelos circulares, y tercios y sextos en modelos rectangulares.

En las actividades fue indispensable el papel que jugó el material manipulativo (Perera, 2001) que constó de muñecos que representaban a los sujetos de los problemas, mesas y sillas permitiendo la experimentación del arreglo de asientos que de acuerdo con Streefland (1991) son el terreno de cultivo en el que un proceso de matematización vertical hace raíces y en el

cual, las proporciones y las fracciones se distinguen y se relacionan entre sí. Todo ello genera un ambiente real en el cual se puede trabajar el reparto y la equivalencia.

### **Análisis de resultados**

En la instrucción comúnmente recibida no se aceptan modos alternos para dar solución a un problema, por tal motivo nos atrevemos a suponer que ambos sujetos aprendieron que sólo hay un procedimiento para resolver los problemas, por lo que tienden a emplear únicamente una estrategia de resolución hasta que se les indica que resuelvan la actividad de otra forma (situación a partir de la cual pueden llegar a diversificar sus procesos de resolución de problemas).

#### *El caso de Mario*

Mario presentó en los problemas verbales del cuestionario una fuerte tendencia a dar la respuesta numérica de sus repartos con números naturales, utilizando expresiones como “dos partes cada uno”, “una parte de la barra”. Utilizó únicamente la estrategia “Divide cada unidad en el mismo número de personas”, sólo en tres problemas realizó el reparto escribiendo el nombre de la persona dentro de cada parte. En un problema no consideró la equidad y en otro, la exhaustividad.

Durante la entrevista, la estrategia que utilizó fue la misma que en el cuestionario pero al pedirle que resolviera el problema de otra manera, Mario utilizó la estrategia “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias” que consistió en dividir cada unidad igual a como lo hizo en su primera estrategia; posteriormente, cada pedazo lo dividió a la mitad, así primero dividió en cuartos y después obtuvo octavos (Figura 1).



Figura 1. Estrategias de partición que utilizó Mario en el ejercicio 1.

No le fue difícil observar que el resultado de las dos estrategias que empleó para resolver el mismo problema eran equivalente, realizó comentarios como “las dos comieron igual, porque en el momento en que los dividí me di cuenta que estas dos partes (los cuartos) hacen la mitad del pastel y las dos comieron la mitad del pastel”.

Durante la entrevista demostró que no tenía problema alguno para asignar al resultado de su reparto un número fraccionario; sin embargo, para él le era más cómodo expresar su respuesta con naturales.

### El caso de Miriam

Miriam fue seleccionada porque al solucionar los problemas verbales empleó la estrategia “Divide cada unidad en el mismo número de personas”, pero, además, utilizó la estrategia “En su respuesta numérica, da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto”.

En el problema 1 del cuestionario, dividió cada pizza en el mismo número de personas y les asignó de cada unidad una parte, la respuesta numérica de acuerdo a su estrategia de solución es  $2/4$ , sin embargo, ella prefirió expresar una equivalencia y escribió “ $1/2$  le toca a cada niño” (Figura 2).

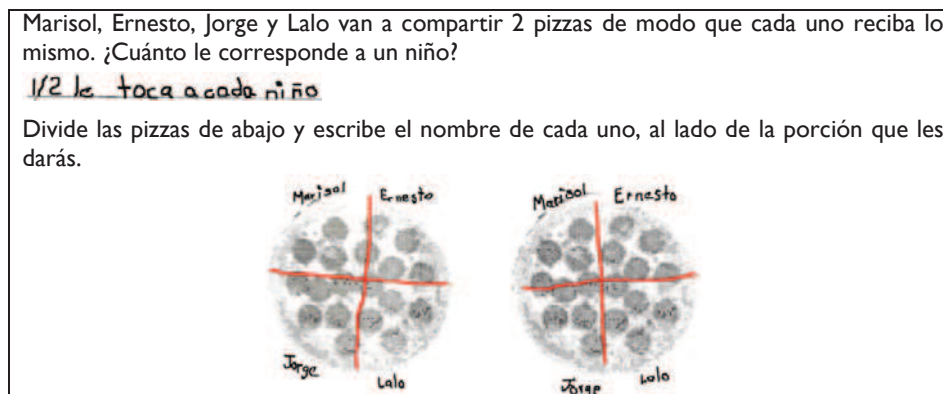


Figura 2. Estrategia de reparto que empleó para el problema 1.

En la entrevista, Miriam empleó tres estrategias diferentes a las utilizadas en el cuestionario. Primero “Interpreta la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hace el reparto, obteniendo una parte para cada persona”; así, al repartir dos pizzas entre cuatro personas dividió cada una en medios. También, utilizó las estrategias “Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones” y “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias”.

### Contraste de los casos

Ambos alumnos optaron por resolver los problemas utilizando la misma estrategia “Divide cada unidad en el mismo número de personas”, aunque Miriam diera su respuesta numérica con una equivalencia a Mario le fuera más fácil comunicarla con números naturales.

De acuerdo al cuadro de análisis propuesto por Valdemoros (2004), en el plano de la escritura, Mario tradujo los aspectos cuantitativos al lenguaje de los naturales, situación que nos hace presumir que en la enseñanza recibida hubo exclusión de tales problemas. Estas situaciones nos indican que había comprendido el problema pero no pudo expresar su resultado con una fracción, evidenciando una comprensión básica de las tareas y de los contenidos semánticos, aun cuando no llegó a una identificación de la fracción. A diferencia de ello, en el plano de la traducción, Miriam pudo ir y venir de una representación a otra, sin ningún problema, manejando adecuadamente la equivalencia entre los resultados obtenidos en los pictogramas y las respuestas numéricas y preservando los contenidos semánticos sustanciales para los modelos considerados. Ella empleó simultáneamente distintos lenguajes, a nivel de la respuesta escrita y pictogramas.

En cuanto a la equivalencia, a Mario le ayudaron los ejercicios de la entrevista para apropiarse de dicha idea, la que de acuerdo con Streefland (1991), al trabajar en la entrevista los arreglos de asientos, facilitó el proceso de matematización vertical, en el cual las proporciones y las fracciones se distinguen y se relacionan entre sí.

Respecto al plano de la semántica, Miriam no presentó dificultades en el reconocimiento de las restricciones semánticas introducidas por el modelo fraccionario del reparto y Mario, en algunos problemas, no tomó en cuenta algunas de estas restricciones; sin embargo, él superó dicha dificultad a través de la realización de los problemas en la entrevista, tomando en cuenta el requisito de una distribución equitativa y exhaustiva.

## Conclusiones

La estrategia más utilizada es aquella donde dividen cada objeto de la colección en el número de personas que intervienen en el reparto y asignan una de esas partes a cada persona.

No es coincidencia que ambos alumnos optaran por utilizar la estrategia “Divide cada unidad en el mismo número de personas” ya que es una estrategia común observada por otros investigadores, aunque sea denotada con diversos nombres (Charles & Nason, 2000, Empson, et al., 2005, Lamon, 1996, Mamede, et al., 2005).

La utilización de otras estrategias sólo se dio cuando fue requerido por ambos sujetos del estudio de casos, en las que emplearon diversas nociones de equivalencia. Se caracterizaron por mantener distintas interpretaciones de la unidad. Partieron cada objeto en el mismo número de personas que intervinieron en el reparto, dividieron cada objeto en un número de partes equivalentes a la cantidad de personas que participan, asignaron objetos enteros a cada persona y subdividieron los sobrantes, si así lo favorecían las condiciones generales del

reparto. Las estrategias fueron “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias”, “Interpreta la unidad integrando todos los objetos de la colección y con base en ello hace el reparto, obteniendo una parte para cada persona”, “Reparte unidades a cada persona y lo que sobra lo divide en fracciones” y “Partición y reparto equivalente realizando más divisiones de las necesarias”.

En cuanto a la escritura de la respuesta numérica se observó que les resultó más cómodo asignar un número natural al resultado de su reparto que identificar una fracción. Sin embargo, el ambiente del reparto requiere modos de simbolización que permitan establecer la correspondencia entre los objetos repartidos y las personas que intervienen en el reparto y a través de la idea de la familia Franco, el arreglo de asientos y la distribución se trabajan formas de representación y significación derivadas de la relación parte-todo, enriqueciéndolas y ampliándolas en las diferentes estrategias de reparto, todo lo cual ayuda a construir el número fraccionario.

### Referencias bibliográficas

- Charles, K. & Nason, R. (2000). Young children's partitioning strategies studies in mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*, 43, 191-221.
- Empson, S., Junk, D., Domínguez, H., & Turner, E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: Across-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics Education*, 63, 1-28.
- Kieren, T. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. En: T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, Ohio ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics teacher as consulting Architect. *35<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education*, 187-194.
- Lamon, S. (1996). The Developmental of unitizing: its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170-193.
- Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. *Proceeding of the 29<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 281-288.
- Olguín, E. (2009). Estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de reparto con fracciones. Tesis de maestría. Matemática Educativa – Cinvestav, México.
- Perera, P. (2001). Ayuda manipulativa en la resolución de problemas verbales de reparto de todos continuos y discretos. Tesis de Maestría. Matemática Educativa – Cinvestav, México.



- Streefland, L. (1991). The course in theory and practice. En L. Streefland (Ed.). *Fractions in realistic Education: A paradigm of developmental research* (46-134). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Valdemoros, M. (1993). La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él. (Tesis Doctoral no publicada). Matemática Educativa, Cinvestav, México.
- Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: Estudio de caso. *Educación Matemática*, 13(1), 51-67.
- Valdemoros, M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 7(3), 235-256.